

数 学 I

(全 問 必 答)

第 1 問 (配点 25)

[1] x は正の実数で、 $x^2 + \frac{4}{x^2} = 9$ を満たすとする。このとき

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = \boxed{\text{アイ}}$$

であるから、 $x + \frac{2}{x} = \sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{8}{x^3} &= \left(x + \frac{2}{x}\right) \left(x^2 + \frac{4}{x^2} - \boxed{\text{ウ}}\right) \\ &= \boxed{\text{エ}} \sqrt{\boxed{\text{オカ}}} \end{aligned}$$

である。また

$$x^4 + \frac{16}{x^4} = \boxed{\text{キク}}$$

である。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

また、 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = \boxed{\text{ケ}}$ である。 $x - \frac{2}{x} < 0$ のときは

$x - \frac{2}{x} = -\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ であり、したがって、このとき

$$x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コサ}}} - \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

数学 I

〔2〕 実数 x に関する 2 つの条件 p, q を

$$p: x = 1$$

$$q: x^2 = 1$$

とする。また、条件 p, q の否定をそれぞれ \bar{p}, \bar{q} で表す。

(1) 次の , , , に当てはまるものを、下の ①~③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための 。

\bar{p} は q であるための 。

$(p$ または $\bar{q})$ は q であるための 。

$(\bar{p}$ かつ $q)$ は q であるための 。

- ① 必要条件だが十分条件でない
- ② 十分条件だが必要条件でない
- ③ 必要十分条件である
- ④ 必要条件でも十分条件でもない

(数学 I 第 1 問は次ページに続く。)

(2) 実数 x に関する条件 r を

$$r: x > 0$$

とする。次の ツ に当てはまるものを、下の①~⑦のうちから一つ選べ。

3つの命題

$$A: [(p \text{ かつ } q) \implies r]$$

$$B: [q \implies r]$$

$$C: [\bar{q} \implies \bar{p}]$$

の真偽について正しいものは ツ である。

- ① A は真, B は真, C は真
- ② A は真, B は真, C は偽
- ③ A は真, B は偽, C は真
- ④ A は真, B は偽, C は偽
- ⑤ A は偽, B は真, C は真
- ⑥ A は偽, B は真, C は偽
- ⑦ A は偽, B は偽, C は真
- ⑧ A は偽, B は偽, C は偽

数学 I

第 2 問 (配点 25)

a は定数とする。

(1) $f(x) = (x - 3a^2 - 5a)^2 - (3a^2 - 4)^2$ とおく。このとき

$$f(x) = \left(x - 5a - \boxed{\text{ア}} \right) \left(x - \boxed{\text{イ}} a^2 - 5a + \boxed{\text{ウ}} \right)$$

である。したがって、2 次関数 $y = f(x)$ のグラフが原点を通るのは、 a の値が小さい方から

$$a = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad -\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}, \quad \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである。

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) $g(x) = x^2 - 2(3a^2 + 5a)x + 18a^4 + 30a^3 + 49a^2 + 16$ とおく。2次関数 $y = g(x)$ のグラフの頂点は

$$\left(\boxed{\text{コ}} a^2 + \boxed{\text{サ}} a, \boxed{\text{シ}} a^4 + \boxed{\text{スセ}} a^2 + \boxed{\text{ソタ}} \right)$$

である。 a が実数全体を動くとき、頂点の x 座標の最小値は $-\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テト}}}$ であ

る。次に、 $t = a^2$ とおくと、頂点の y 座標は

$$\boxed{\text{シ}} t^2 + \boxed{\text{スセ}} t + \boxed{\text{ソタ}} \dots\dots\dots \text{①}$$

と表せる。したがって、 a が実数全体を動くとき、頂点の y 座標の最小値は $\boxed{\text{ナニ}}$ である。また、上の式①は

$$\left(\boxed{\text{ヌ}} t + \boxed{\text{ネ}} \right)^2$$

と変形できる。頂点の y 座標が 10000 以下になる a の値の範囲は

$$\boxed{\text{ノハ}} \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}} \leq a \leq \boxed{\text{フ}} \sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}$$

である。

数学 I

第 3 問 (配点 30)

$\triangle ABC$ において、 $AB = \sqrt{3} - 1$ 、 $BC = \sqrt{3} + 1$ 、 $\angle ABC = 60^\circ$ とする。

- (1) $AC = \sqrt{\text{ア}}$ であるから、 $\triangle ABC$ の外接円の半径は $\sqrt{\text{イ}}$ であり

$$\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{\text{ウ}} + \sqrt{\text{エ}}}{\text{オ}}$$

である。ただし、 ウ 、 エ の解答の順序は問わない。

- (2) 辺 AC 上に点 D を、 $\triangle ABD$ の面積が $\frac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$AB \cdot AD = \frac{\text{カ} \sqrt{\text{キ}} - \text{ク}}{\text{ケ}}$$

であるから、 $AD = \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(3) 点 C から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を E とすると、

$$CE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}} + \boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \text{ であるから}$$

$$\cos \angle ACE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}} + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}$ 、 $\boxed{\text{タ}}$ の解答の順序は問わない。

また

$$\cos \angle ACB = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} + \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

であることから、 $\angle ACE = \boxed{\text{ナニ}}^\circ$ である。ただし、 $\boxed{\text{ツ}}$ 、 $\boxed{\text{テ}}$ の解答の順序は問わない。

したがって

$$\tan \boxed{\text{ナニ}}^\circ = \boxed{\text{ヌ}} - \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$$

である。

数学 I

第 4 問 (配点 20)

スキージャンプは、飛距離および空中姿勢の美しさを競う競技である。選手は斜面を滑り降り、斜面の端から空中に飛び出す。飛距離 D (単位は m) から得点 X が決まり、空中姿勢から得点 Y が決まる。ある大会における 58 回のジャンプについて考える。

- (1) 得点 X 、得点 Y および飛び出すときの速度 V (単位は km/h) について、図 1 の 3 つの散布図を得た。

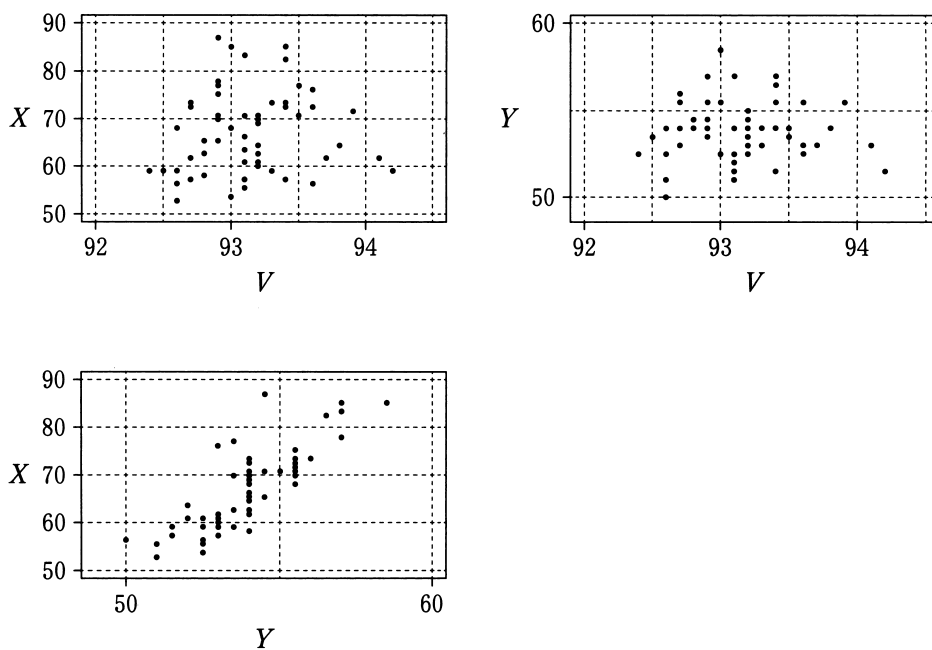


図 1

(出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成)

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

次の ア , イ , ウ に当てはまるものを, 下の①~⑥のうちから一つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

図 1 から読み取れることとして正しいものは, ア , イ , ウ である。

- ① X と V の間の相関は, X と Y の間の相関より強い。
- ② X と Y の間には正の相関がある。
- ③ V が最大のジャンプは, X も最大である。
- ④ V が最大のジャンプは, Y も最大である。
- ⑤ Y が最小のジャンプは, X は最小ではない。
- ⑥ X が 80 以上のジャンプは, すべて V が 93 以上である。
- ⑦ Y が 55 以上かつ V が 94 以上のジャンプはない。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

(2) 得点 X は、飛距離 D から次の計算式によって算出される。

$$X = 1.80 \times (D - 125.0) + 60.0$$

次の , , にそれぞれ当てはまるものを、下の①~⑥のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

- X の分散は、 D の分散の 倍になる。
- X と Y の共分散は、 D と Y の共分散の 倍である。ただし、共分散は、2つの変量のそれぞれにおいて平均値からの偏差を求め、偏差の積の平均値として定義される。
- X と Y の相関係数は、 D と Y の相関係数の 倍である。

- ① - 125 ② - 1.80 ③ 1 ④ 1.80
⑤ 3.24 ⑥ 3.60 ⑦ 60.0

(数学 I 第 4 問は 16 ページに続く。)

数学 I

- (3) 58回のジャンプは29名の選手が2回ずつ行ったものである。1回目の $X+Y$ (得点 X と得点 Y の和)の値に対するヒストグラムと2回目の $X+Y$ の値に対するヒストグラムは図2のA, Bのうちのいずれかである。また, 1回目の $X+Y$ の値に対する箱ひげ図と2回目の $X+Y$ の値に対する箱ひげ図は図3のa, bのうちのいずれかである。ただし, 1回目の $X+Y$ の最小値は108.0であった。

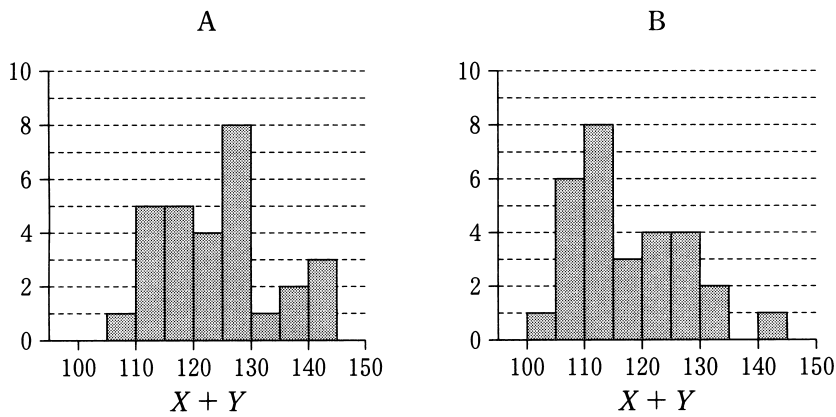


図 2

(出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成)

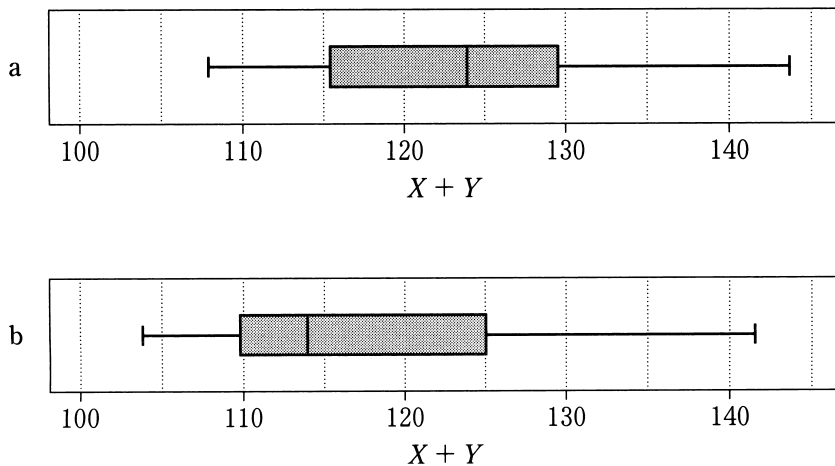


図 3

(出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成)

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

次の に当てはまるものを、下の表の①～④のうちから一つ選べ。

1 回目の $X + Y$ の値について、ヒストグラムおよび箱ひげ図の組合せとして正しいものは、 である。

	①	②	③	④
ヒストグラム	A	A	B	B
箱ひげ図	a	b	a	b

次の に当てはまるものを、下の①～④のうちから一つ選べ。

図 3 から読み取れることとして正しいものは、 である。

- ① 1 回目の $X + Y$ の四分位範囲は、2 回目の $X + Y$ の四分位範囲より大きい。
- ② 1 回目の $X + Y$ の中央値は、2 回目の $X + Y$ の中央値より大きい。
- ③ 1 回目の $X + Y$ の最大値は、2 回目の $X + Y$ の最大値より小さい。
- ④ 1 回目の $X + Y$ の最小値は、2 回目の $X + Y$ の最小値より小さい。

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

- (4) 58回のジャンプでは、斜面上の高さが異なる3つの地点がスタート位置として用いられた。これらを「高」, 「中」, 「低」と表し、スタート位置に応じて得点 X から得点 X' を次のように定める。

スタート位置が「高」のとき, $X' = X$

スタート位置が「中」のとき, $X' = X + 3.8$

スタート位置が「低」のとき, $X' = X + 7.6$

得点 X および X' について、スタート位置ごとに箱ひげ図を描いたものが図4である。

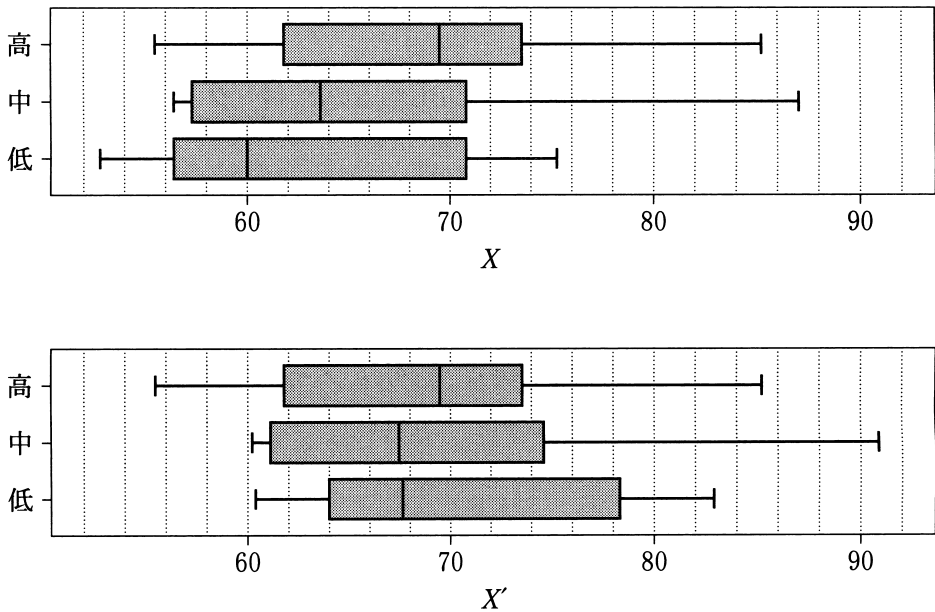


図 4

(出典：国際スキー連盟の Web ページにより作成)

(数学 I 第 4 問は次ページに続く。)

数学 I

次の ケ コ に当てはまるものを、下の①～④のうちから一つずつ選べ。ただし、解答の順序は問わない。

図 4 に関する記述として正しいものは、 ケ コ である。

- ① X および X' の両方において、スタート位置が高いほど、中央値も大きくなっている。
- ② X ではスタート位置が高いほど中央値も大きくなっているのに対し、 X' ではスタート位置によらず中央値が 66 以上 70 未満の区間に入っている。
- ③ どのスタート位置の場合でも、 X の四分位範囲と X' の四分位範囲は等しい。
- ④ X および X' の両方において、スタート位置が高いほど第 1 四分位数が大きくなっている。
- ⑤ X および X' の両方において、スタート位置が高いほど第 3 四分位数が大きくなっている。