

数 学

＜監督者の指示があるまで開いてはいけない＞

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は各科目の試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

(1) A, B の 2 人が次のようなゲームを行う。

赤玉 2 個, 白玉 1 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を調べてからもとに戻す。取り出した玉の色により, 赤玉のときは A が 1 点を得て, 白玉のときは B が 2 点を得る。この試行を繰り返し, 先に 3 点以上得た方を勝ちとしてゲームを終了する。

このとき, B が勝つ確率は (ア) である。また, ゲームが 3 回目の試行により終了する確率は (イ) である。

(2) 四面体 ABCD において, $AB = 3$, $BC = \sqrt{13}$, $CA = 4$, $DA = DB = DC = 3$ とし, 頂点 D から $\triangle ABC$ に垂線 DH を下ろす。このとき, DH の長さは (ウ), 四面体 ABCD の体積は (エ) である。

2. a を正の実数の定数とし、 xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = xe^{-x}, \quad C_2 : y = ae^{-x}$$

を考える。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフの概形を xy 平面上に描け (xy 平面は解答用紙にある)。ただし、必要ならば $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてよい。
- (2) $1 \leq x \leq 2$ の範囲で、 C_1 、 C_2 と 2 直線 $x = 1$ 、 $x = 2$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を a を用いて表せ。
- (3) a が $a > 0$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

3. n を 2 以上の整数の定数とする。 xy 平面上に定点 $A(1, 0)$ がある。 y 軸上の点 P を通り x 軸に平行な直線上で、 $AP + PQ \leq n$ をみたす点 Q を考える。 P が y 軸上を動くとき、 Q の存在範囲を $D(n)$ とする。 このとき、 次の問いに答えよ。 問い (1) では にあてはまる適切な式を解答欄に記入せよ。

- (1) $D(n)$ は不等式 (オ) をみたす点 (x, y) 全体である。 また、 $D(2)$ を xy 平面上に図示せよ (xy 平面は解答用紙にある)。
- (2) xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。 $D(n)$ に含まれる格子点の個数 $S(n)$ を n を用いて表せ。 また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S(n)}{(2n+1)^2}$ の値を求めよ。

4. O を原点とする xyz 空間に定点 $A(2, 1, 2)$ がある。点 P が条件「2つのベクトル \vec{OA} , \vec{OP} のなす角は $\frac{\pi}{3}$ かつ $|\vec{OA}| = |\vec{OP}|$ 」をみたしながら動くとき、次の問いに答えよ。問い(1)では にあてはまる適切な座標または数値を解答欄に記入せよ。

(1) 点 P から直線 OA に垂線 PC を下ろすとき、 P の位置によらず点 C の座標は (カ) である。また、 C を通り、直線 OA に垂直な平面 α 上に、2点 $G(0, 0, s)$, $H(1, 2, t)$ があるとき、 s, t の値は $s =$ (キ), $t =$ (ク) である。

(2) $P(x, y, z)$ について、 $y - 2x$ のとり得る値の範囲を求めよ。