

[I] 3次方程式 $(x-p)(x^2+qx+r)=0$ (ただし, p, q, r は実数) を考え, 方程式 $x^2+qx+r=0$ の解を α, β とする。 p, α, β に対応する複素数平面上の点をそれぞれ P, A, B とするとき, 次の間に答えよ。

- (1) 3点 P, A, B が三角形をなすための p, q, r の条件を求めよ。
- (2) (1) の条件の下で, 三角形 PAB の面積 S を p, q, r で表せ。
- (3) さらに, 三角形 PAB の外接円の中心 Q および半径 R を p, q, r で表せ。

[II] 次の間に答えよ。

- (1) xy 平面上の2直線 $x-y+1=0, 3x+y-5=0$ と曲線 $x^2+2x+4y+5=0$ で囲まれる領域の面積を求めよ。
- (2) (1) で考えた領域の点 (a, b) で境界上になく, a, b がともに整数であるものの個数を求めよ。

[III] p を素数, a, b, c を整数とする。次の問に答えよ。

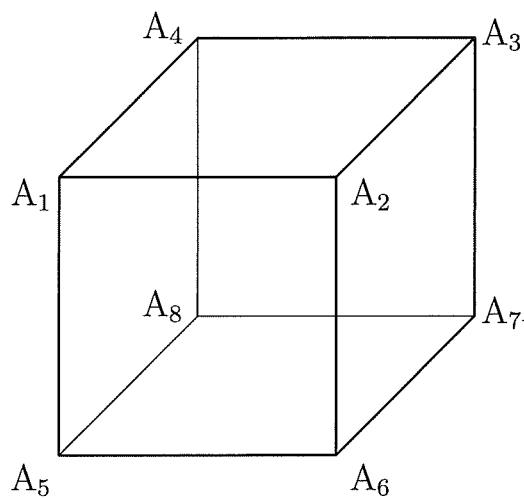
- (1) $\sqrt[3]{p}$ が無理数になることを示せ。
- (2) $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$ ならば, $ap + b(\sqrt[3]{p})^2 + c\sqrt[3]{p} = 0$ となることを示せ。
- (3) $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$ ならば, $bc - a^2p + (b^2 - ac)\sqrt[3]{p} = 0$ となることを示せ。
- (4) $a(\sqrt[3]{p})^2 + b\sqrt[3]{p} + c = 0$ ならば, $a = b = c = 0$ となることを示せ。

[IV] 次の問に答えよ。

- (1) 関数 $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$ を微分せよ。
- (2) 関数 $g(x) = e^{-\pi x} \sin \pi x$ を考える。
 - (i) $g(x)$ の極値をすべて求めよ。
 - (ii) $n - 1 \leq x \leq n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) における $y = g(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。
 - (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ を求めよ。

[V] 立方体の8個の頂点を図のように A_1, A_2, \dots, A_8 とする。この8点から無作為に4点を選び、それらを頂点とする四面体あるいは四角形を X とする。また、残りの4点から同様にしてできる図形を Y とし、 X と Y の共通部分（交わってできる図形）を Z とする。次の問に答えよ。ただし、(1), (2) は答のみでよい。

- (1) X が A_1, A_3, A_6, A_8 を頂点とする四面体で、 Y が A_2, A_4, A_5, A_7 を頂点とする四面体のとき、 Z はどんな図形か。
- (2) X が A_1, A_2, A_3, A_7 を頂点とする四面体で、 Y が A_4, A_5, A_6, A_8 を頂点とする四面体のとき、 Z はどんな図形か。
- (3) X と Y が共通部分をもたない確率を p とし、 X と Y の共通部分 Z が1点になる確率を q_0 、線分になる確率を q_1 、平面図形になる確率を q_2 、立体図形になる確率を q_3 とする。 p, q_0, q_1, q_2, q_3 を求めよ。



[以下余白]